## Дистанційні уроки математики для школярів

## Урок 1. Відсотки (проценти)

Практика показує, що серед задач, яких боїться значна частина випускників шкіл та навіть студентів-першокурсників спеціальностей, пов'язаних з математикою, чільне місце займають задачі на відсотки (або проценти). І, на моє переконання, боязнь ця породжена певними стереотипами, психологічними комплексами і аж ніяк не складністю математичної теорії чи відсутністю в учня математичних здібностей. А тому не маю жодного сумніву, що навчитися розв'язувати задачі на проценти може кожен. Причому навчитися просто зараз. Тож, до справи?!

Спочатку заспокою усіх, хто думає, що для успішного розв'язування задач на відсотки (проценти) потрібно оволодіти об'ємним теоретичним матеріалом. Так от, уся теорія, якої досить для цього самого успішного розв'язання вміщається аж…в одному реченні.

**Один відсоток (процент) – це одна сота частина чого-небудь.**

Тобто, $\mathbf{1\% = \frac{1}{100}}$ або те саме, що $\mathbf{1\% = 0{,}01}$.

А щоб знайти соту частину будь-чого, потрібно це «будь-що» поділити на 100, або те саме, що помножити його на 0,01. Справді, $a:100=\frac{a}{100}=\frac{1}{100}\cdot a=0{,}01a.$ Щоб знайти, скажімо, 15% чогось, треба знайти $\frac{15}{100}$ його; а для цього це «щось» слід поділити на 100 і помножити на 15, або, простіше, одразу помножити його на 0,15 (справді, $a:100\cdot 15=\frac{a}{100}\cdot 15=\frac{15a}{100}=0{,}15a$).

Значить, 1% від 100 грн. – це 1 грн.; 1% числа 154 – це 154:100=1,54;

5% числа 7 – це $0{,}05\cdot 7=0{,}35$; *k %* числа 48 – це $\frac{k}{100}\cdot 48=\frac{48k}{100}=0{,}48k$. І т. д.

Тепер навпаки: 0,14 – це 14%; 0, 3=0,30 – це 30%.

А скільком відсоткам дорівнює дріб $\frac{3}{25}$? Щоб відповісти, потрібно з'ясувати скільком сотим дорівнює $\frac{3}{25}$, тобто перетворити число $\frac{3}{25}$ у десятковий дріб, наприклад, так: $\frac{3}{25}=\frac{3\cdot4}{25\cdot4}=\frac{12}{100}=0{,}12$. Отже, $\frac{3}{25}$ – це 12%. А дріб $\frac{4}{7}$? Знову ж, перетворимо його в десятковий, бо нам потрібно знати, скільки це **сотих** (а не сьомих). Поступити так само, як у попередньому випадку, помноживши чисельник і знаменник на одне й те ж число, щоб у знаменнику дістати одиницю з нулями (тобто $10^k$) не можемо, бо 7 не є дільником числа 10 (10 на 7 не ділиться). Тому ділимо 4 на 7 (чисельник на знаменник) «у стовпчик» або на калькуляторі. Маємо 4:7$\approx$0,571 ($\approx$ – знак наближеної рівності, тобто 4:7 приблизно дорівнює 0,571). Скільки ж тут сотих? Розряд сотих – це друга цифра після коми. Тому, переносячи уявно кому на дві цифри вправо (або те саме, що помноживши на 100), читаємо результат: $\approx$57,1%.

Варто знати напам'ять (не обраховуючи довго), що $\frac{1}{4}=25\%$ (четвертина), $\frac{1}{2}=50\%$ (половина), $\frac{3}{4}=75\%$ (три четверті), $\frac{1}{5}=20\%$.

Розв'яжемо дві простенькі задачі.

**Задача 1**. Відомо, що тіло людини на 70% складається із води. Скільки кілограмів води в людині масою 60 кг?

*Розв'язання*.

Очевидно, нам потрібно знайти 70% від 60 кг. 70% – це 0,70 або 0,7. Тому шукана величина дорівнює: $0{,}7\cdot60=42$ (кг).

*Відповідь*: 42 кг.

**Задача 2**. У класі 27 учнів, на уроках відсутні четверо. Який процент відвідування в класі, тобто який відсоток учнів класу присутній на заняттях?

*Розв'язання*.

Якщо четверо учнів відсутні, то присутні 27 – 4 = 23. Один учень – це $\frac{1}{27}$ частина класу, 23 учні становлять $\frac{23}{27}$ усього колективу. Залишається перетворити дріб $\frac{23}{27}$ у десятковий. Для цього ділимо («у стовпчик» чи на калькуляторі) 23 на 27. Маємо: 23:27$\approx$0, 852 або 85,2%.

*Відповідь*: $\approx$85,2%.

А тепер розв'яжемо кілька «страшних» задач.

**Задача 3**. Вартість куртки на сезонному розпродажі знижували двічі: спочатку на 15%, а потім ще на 10%. На скільки відсотків знизилася початкова вартість куртки?

*Розв'язання*.

Позначимо початкову вартість куртки – $a$ гр. од. Після першої переоцінки (зниження вартості на 15%) куртка коштувала

$$a - 0{,}15a = 0{,}85a.$$

Після ще одного зниження вартості (на 10%) куртка стала коштувати

$$0{,}85a - 0{,}1 \cdot 0{,}85a = 0{,}9 \cdot 0{,}85a = 0{,}765a\,.$$

Тобто кінцева вартість куртки становить 76,5% її початкової вартості. Таким чином, унаслідок двох переоцінок куртка подешевшала на 23,5%.

*Відповідь*: 23,5%.

Наступну задачу пропоную розв'язати самостійно.

**Задача 4**. Вартість комунальних послуг у місті N протягом року зростала двічі – спочатку на 23%, а потім ще на 17%. На скільки відсотків зросла вартість комунальних послуг за рік?

*Відповідь*: $\approx 44\%$.

**Задача 5**. Змішали 30%-й розчин соляної кислоти з 10%-м і отримали 600 грамів 15%-го розчину. Скільки грамів кожного розчину було взято?

*Розв'язання*.

Розв'яжемо задачу за допомогою системи рівнянь. Зазначимо, що невідомими найчастіше доцільно позначити ті величини, які у задачі вимагають знайти. Отже, нехай 30%-го розчину було $x$ грамів, а 10%-го – $y$ грамів. Згідно з умовою задачі суміші було 600 грамів, звідки маємо рівняння:

$$x + y = 600.$$

Ще одне рівняння дістанемо, прирівнюючи, з одного боку, масу кислоти у двох розчинах разом та їх суміші – з другого, оскільки ці маси рівні. У $x$ грамах 30%-го розчину міститься $0{,}3x$ грамів соляної кислоти, в $y$ грамах 10%-го розчину – $0{,}1y$ грамів кислоти, а в 600 грамах 15%-ї їх суміші – 0,15*600 грамів, тому маємо:

$$0{,}3x + 0{,}1y = 0{,}15 \cdot 600\,.$$

Розв'яжемо систему двох записаних рівнянь:

$$\begin{cases} x+y=600, \\ 0{,}3x+0{,}1y=0{,}15\cdot 600 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=600, \\ 3x+y=900 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=600, \\ 2x=300 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=150, \\ y=450. \end{cases}$$

*Відповідь*: 150 г і 450 г.

*Примітка*. Можна було обійтися й одним рівнянням. Якщо масу першого розчину у суміші позначити через *x*, то маса другого буде (600 – *x*). Тоді прийдемо до рівняння: $0{,}3x+0{,}1\cdot(600-x)=0{,}15\cdot 600$.

**Задача 6** (*уявляємо себе ювелірами*). Маємо злиток золота 375-ї проби масою 120 грамів. Для тендітної оправи діамантів використовується золото 750-ї проби. Скільки чистого золота слід переплавити зі злитком 375-ї проби, щоб новий сплав мав 750-у пробу?

*Розв'язання* (*уявляємо себе ювелірами*).

Спочатку зазначимо, що «проба», яка обов'язково проставляється на всіх виробах із золота, означає частку чистого золота у сплаві його із більш твердим металом, наприклад, міддю. Зокрема, проба 375 означає, що 1 кг сплаву містить 375 г чистого золота або 37,5% ($\frac{375}{1000}=0{,}375=37{,}5\%$). Аналогічно, золото 750-ї проби містить 75% чистого золота.

Отже, позначимо через *x* те, що в задачі запитують, тобто кількість (у грамах) чистого золота, яку потрібно додати до злитка 375-ї проби, щоб дістати золото 750-ї проби. Шукаємо тепер в умові задачі ту інформацію, яку можна записати у вигляді рівності. Очевидно, у початковому (375-ї проби) і новому (750-ї проби) злитках – одна й та ж маса іншого металу, ну, скажімо, міді. Тому запишемо маси міді у початковому (який є) і новому (який хочемо дістати) сплавах.

У початковому злитку, маса якого 120 г, чисте золото становить 37,5%. Тоді міді там (100–37,5)%=62,5% або $0{,}625\cdot 120=75$(г). У новому злитку, маса якого (120+*x*) г, чистого золота має бути 75%. Тоді на мідь припадає 25% або $0{,}25\cdot(120+x)$ г. Прирівнюючи масу міді у двох сплавах, дістаємо рівняння:

$$0{,}25\cdot(120+x)=75.$$

Звідси

$$120+x=75:0{,}25;$$

$$120+x=300;$$

$$x=300–120=180.$$

Оскільки через $x$ ми позначили те, що в задачі запитують, то знайдений корінь рівняння є відповіддю.

*Відповідь*: 180 г.

**Задача 7**. Два хутра загальною вартістю 225 тис. у. о. були продані на аукціоні з прибутком 40%. Яка вартість кожного хутра окремо, якщо від першого було отримано прибуток 25%, а від другого – 50%?

*Розв'язання*.

(Пам'ятаємо про пораду позначати невідомими те, що в задачі запитують). Нехай вартість першого хутра $x$ тис. гр. од., а другого – $y$ тис. у. о. Оскільки їх загальна вартість 225 тис. у. о., то легко записуємо перше рівняння:

$$x+y=225.$$

Використовуємо решту даних умови задачі. Зокрема, запишемо у вигляді рівності інформацію про те, що сумарний прибуток становив 40%, тобто $0{,}4\cdot 225$ тис. у. о., який складався із двох частин – 25%-го прибутку від першого хутра ($0{,}25x$ тис. у. о.) та 50%-го – від другого ($0{,}5y$ тис. у. о.):

$$0{,}25x+0{,}5y=0{,}4\cdot 225.$$

Залишається розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x+y=225, \\ 0{,}25x+0{,}5y=0{,}4\cdot 225. \end{cases}$$

Помножимо обидві частини другого рівняння на 100, а потім поділимо на 25. Матимемо:

$$\begin{cases} x+y=225, \\ x+2y=360. \end{cases}$$

звідки $x = 90$, $y = 135$.

*Відповідь*: 90 тис. у. о., 135 тис. у. о.

*Примітка*. Можна було, звісно, обійтися й одним рівнянням, бо, якщо позначити вартість одного хутра за $x$ тис. у. о., то вартість другого – $(225 – x)$ тис. у. о.

**Задача 8**. Із молока, жирність якого 5%, виготовляють сир жирністю 15,5%, при цьому залишається сироватка жирністю 0,5%. Скільки сиру вийде з 1 т молока?

*Розв'язання.*

В умові задачі маємо інформацію про жирність (тобто процентний вміст жиру) молока і продуктів, з нього отриманих: сиру та сироватки. Оскільки при переробці молока жир нікуди не зникає, то, значить, кількість (за масою) жиру в молоці дорівнює кількості жиру в сирі та сироватці разом. Це й дасть можливість записати рівняння.

Отже, нехай з 1 т (1000 кг) молока вийде *x* кг сиру (невідомим позначили те, що в задачі запитують). Тоді сироватки буде (1000–*x*) кг (решта). Тепер записуємо вміст жиру у кожному з трьох продуктів:

- 1000 кг молока містить 5% жиру або 0,05*1000 кг;
- *x* кг сиру містить 15,5% жиру або 0,155*x* кг;
- (1000–*x*) кг сироватки містить 0,5% жиру або 0,005(1000–*x*) кг.

Складаємо рівняння:

$$0{,}155x + 0{,}005 \cdot (1000 - x) = 0{,}05 \cdot 1000.$$

Розв'язуємо його:

$$0{,}155x + 5 - 0{,}005x = 50;$$

$$0{,}15x = 45;$$

$$x = 45:0{,}15=4500:15=300.$$

*Відповідь*: 300 кг.

**Задача 9**. Сплавили два сорти чавуну з різним процентним вмістом хрому. Якщо одного сорту взяти у 5 разів більше, ніж другого, то процентний вміст хрому у сплаві вдвічі перевищить процентний вміст хрому у меншій із частин, які сплавляють. Якщо ж взяти однакову кількість обох сортів, то сплав міститиме 8% хрому. Визначити процентний вміст хрому у кожному сорті чавуну.

*Розв'язання.*

Уже традиційно позначимо невідомими ті величини, які в задачі потрібно знайти. Отже, нехай у чавуні першого сорту хрому міститься *x*%, а в чавуні другого сорту – *y*%. Тепер маємо скласти два рівняння. В умові задачі чітко бачимо два речення, які можемо перефразувати у вигляді рівностей.

Перше речення: «Якщо одного сорту взяти у 5 разів більше, ніж другого, то процентний вміст хрому у сплаві вдвічі перевищить процентний вміст хрому у меншій із частин, які сплавляють». Оскільки масу чавуну, яку беруть, не вказано, то позначимо її якоюсь буквою (ця буква потім «зникне», скоротиться). Наприклад, нехай чавуну першого сорту взято $a$ од. маси, тоді чавуну другого сорту буде $5a$ од. маси, бо за умовою «у 5 разів більше». Міркуємо далі. Оскільки процентний вміст хрому в чавуні першого сорту $x$%, то в $a$ од. маси цього сорту чавуну хрому буде $\frac{x}{100}\cdot a$ од. маси. Аналогічно, в $5a$ од. маси чавуну другого сорту хрому буде $\frac{y}{100}\cdot 5a$ од. маси. Тоді у сплаві (маса якого $a$+$5a$=$6a$ од. маси) хрому буде $\frac{x}{100}\cdot a+\frac{y}{100}\cdot 5a$ од. маси або така частка: $\dfrac{\frac{x}{100}\cdot a+\frac{y}{100}\cdot 5a}{6a}$, тобто $\frac{x+5y}{6\cdot 100}$ чи те саме, що $\frac{x+5y}{6}\%$. І це, згідно з умовою, удвічі більше за процентний вміст хрому в меншій із частин, які сплавляють, тобто за $x$, що на мові рівностей означає:

$$\frac{x+5y}{6}=2x. \qquad (*)$$

Маємо перше рівняння.

Друге рівняння дістаємо, перефразувавши таке речення з умови задачі: «Якщо ж взяти однакову кількість обох сортів, то сплав міститиме 8% хрому». Кількість (за масою) взятих сортів чавуну невідома, відомо лише, що вона однакова. То нехай сплавляють по $b$ од. маси кожного із сортів чавуну (як і в першому випадку, $b$ потім «зникне»). Тоді у шматку чавуну першого сорту хрому є $\frac{x}{100}\cdot b$ од. маси, у шматку чавуну другого сорту – $\frac{y}{100}\cdot b$ од. маси хрому, а в їх сплаві є $\frac{x}{100}\cdot b+\frac{y}{100}\cdot b$ од. маси хрому, або така частка $\dfrac{\frac{x}{100}\cdot b+\frac{y}{100}\cdot b}{2b}$, тобто $\frac{x+y}{2\cdot 100}$ чи те саме, що $\frac{x+y}{2}\%$. Але, згідно з умовою, це становить 8%. Отже, маємо рівняння:

$$\frac{x+y}{2}=8. \qquad (**)$$

Розв’язуємо систему рівнянь (*) та (**).

$$\begin{cases} \dfrac{x+5y}{6} = 2x, \\ \dfrac{x+y}{2} = 8; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5y = 11x, \\ x + y = 16; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{11}{5}x, \\ x + \dfrac{11}{5}x = 16; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{11}{5}x, \\ 5x + 11x = 80; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{11}{5}x, \\ 16x = 80; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{11}{5}x, \\ x = 5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5, \\ y = \dfrac{11}{5} \cdot 5 = 11. \end{cases}$$

*Відповідь*: 5% і 11%.

Наступні п’ять задач (а також задачу 4) пропоную розв’язати самостійно. Якщо Ви настільки добре зрозуміли наведені вище приклади розв’язаних задач, що з легкістю можете самі ці задачі «перерозв’язати» (пропоную зробити це!), то я впевнена – Вас чекає успіх.

**Задача 10**. У двох бідонах разом 70 л молока. Якщо з першого бідона 12,5% молока перелити в другий, то в обох бідонах молока стане порівну. Скільки літрів молока в кожному бідоні?

*Відповідь*: 40 л і 30 л.

**Задача 11**. Свіжі гриби містять 90% води, а сухі – 12%. Скільки сухих грибів вийде із 22 кг свіжих?

*Відповідь*: 2,5 кг.

**Задача 12**. Шматок сплаву міді й цинку масою 36 кг містить 45% міді. Скільки кг міді треба додати до цього шматка, щоб новий сплав містив 60% міді?

*Відповідь*: 13,5 кг.

**Задача 13**. Перше із невідомих чисел складає 140% другого, а відношення першого до третього дорівнює 14:11. Знайти ці числа, якщо різниця між третім і другим на 40 менша за число, яке становить 12,5% суми першого й другого чисел.

*Відповідь*: 280; 200; 220.

**Задача 14**. Сплав міді зі сріблом містить срібла на 1845 г більше, ніж міді. Якби до нього додати стільки грамів чистого срібла, скільки його міститься в $\frac{1}{3}$ частині даного сплаву, то дістали б новий сплав, який містив би 83,5% срібла. Яка маса початкового сплаву і який процентний вміст у ньому срібла?

*Відповідь*: 3165 г; $\approx$ 79,1%.